

## Özet

Bu çalışmada,  $\mathbb{Z}_n$  ve  $\mathbb{Z}_m$  sonlu devirli monoidlerinin Schützenberger çarpımının tam yeniden yazma sistemi (Gröbner–Shirshov tabanı) üzerine yönsüz bir graf,  $\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}$ , tanımlanmakta ve bu grafın temel kombinatoryal özellikleri (köşe ve kenar sayısı, maksimum/minimum derece, derece dizisi, düzensizlik indeksi ve girth) incelenmektedir. Schützenberger çarpımına ait bir graf tanımlamak, bu cebirsel yapının kombinatoryal ve geometrik özelliklerini incelemek için yeni bir bakış açısı sağlamaktadır.

## Temel Kavramlar: Graf Teorisi

$\Gamma = (V, E)$  herhangi bir basit graf olsun.

►  $\Gamma$  içinde  $v$  köşesine bağlı kenarların sayısına  $v$  köşesinin **dergesi** denir;  $\deg(v)$  ile gösterilir [3].

► **Maksimum ve minimum derece:**

$$\Delta(\Gamma) = \max\{\deg(v) : v \in V\},$$

$$\delta(\Gamma) = \min\{\deg(v) : v \in V\}.$$

►  $\Gamma$  içindeki **en kısa döngünün** uzunluğuna grafın **girth'i** denir;  $\text{girth}(\Gamma)$  ile gösterilir.

► **Derece dizisi**  $DS(\Gamma)$ , köşe derecelerinin çoklukları ile birlikte yazılmasıdır; dizideki birbirinden farklı derece sayısına **düzensizlik indeksi**  $t(\Gamma)$  denir.

## Schützenberger Çarpımı

$A$  ve  $B$  monoid olmak üzere  $P \subseteq A \times B$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$  için  $aP = \{(ac, d) : (c, d) \in P\}$ ,  $Pb = \{(c, db) : (c, d) \in P\}$  olarak tanımlansın.  $A$  ve  $B$  monoidlerinin Schützenberger çarpımı,

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1a_2, P_1b_2 \cup a_1P_2, b_1b_2)$$

işlemi altında tanımlı  $A \times \wp(A \times B) \times B$  kümesidir ve  $A \circ B$  ile gösterilir.  $A \circ B$ , birimi  $(1_A, \emptyset, 1_B)$  olan bir monoiddir [7]. Schützenberger çarpımı, iki monoidin **birleşik davranışını** analiz etmek için geliştirilmiş; dil teorisi, otomata teorisi ve cebirsel yapılar arasında köprü kuran güçlü bir yöntemdir [7].

## Tam Yeniden Yazma Sistemi

Monoidlerde **tam yeniden yazma sistemi**, bir monoidin elemanlarını sonlu sayıda yeniden yazma kuralı ile ifade eden ve her kelimenin sonlu adımda **tek bir normal forma** indirgenmesini sağlayan bir sistemdir. Böyle bir sistem hem **sonlandırılmış** hem de **confluent** (elmas kuralı) özelliklerine sahip ise **tamdır**. Tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoid için **kelime problemi çözülebilirdir** [2].

[1]'de Ateş ve ark., keyfi iki monoidin Schützenberger çarpımının Gröbner–Shirshov tabanını (tam yeniden yazma sistemini) ve dolayısıyla bu çarpımın elemanlarının **normal form** yapısını elde etmiştir.

## Kaynaklar

- Ateş, F., Karpuz, E. G., Kocapınar, C. ve Çevik, A. S. (2011). Gröbner–Shirshov Bases of Some Monoids. *Discrete Math*, 311(6), 1064–1071.
- Book, R. V. ve Otto, F. (1993). *String Rewriting Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Diestel, R. (2025). *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg.
- Karpuz, E. G. ve Yeniél, A. M. (2026). Some Graph Properties of Schützenberger Product of Monoids. (gönderim aşamasında)
- Karpuz, E. G., Ateş, F., Çevik, A. S. ve Cangül, İ. N. (2013). The Graph Based on Gröbner–Shirshov Bases of Groups. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, 71.
- Karpuz, E. G., Das, K. C., Cangül, İ. N. ve Çevik, A. S. (2013). A New Graph Based on the Semi-direct Product of Some Monoids. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 118.
- Schützenberger, M.P. (1965). On Finite Monoids Having Only Trivial Subgroups, *Information and Control*, 8, 190–194.

## $\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m$ Çarpımının Sunuşu

$\mathbb{Z}_n = \langle x; x^n = 1 \rangle$  ve  $\mathbb{Z}_m = \langle y; y^m = 1 \rangle$  monoid sunuşları için Schützenberger çarpımının sunuşu

$$\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m =$$

$\langle x, y, z_{x^k, y^l}; x^n = 1, y^m = 1, z_{x^k, y^l}^2 = z_{x^k, y^l}, z_{x^{k_1, y^{l_1}}}, z_{x^{k_2, y^{l_2}}} = z_{x^{k_1, y^{l_2}}}, z_{x^{k_2, y^{l_1}}}, xz_{x^k, y^l} = z_{x^{k+1, y^l}}, z_{x^k, y^l}y = yz_{x^k, y^{l+1}}, xy = yx \rangle$  şeklindedir.

Burada  $0 \leq k, k_1, k_2 \leq n-1$  ve  $0 \leq l, l_1, l_2 \leq m-1$  dir. Üreteçler arasındaki

$x > z_{x^{n-1, y^{m-1}}} > z_{x^{n-1, y^{m-2}}} > z_{x^{n-1, y^{m-3}}} > \dots > z_{x^{n-1, y}} > z_{x^{n-1, 1}} > z_{x^{n-2, y^{m-1}}} > z_{x^{n-2, y^{m-2}}} > z_{x^{n-2, y^{m-3}}} > \dots > z_{x^{n-2, y}} > z_{x^{n-2, 1}} \dots > z_{x^2, y^{m-1}} > z_{x^2, y^{m-2}} > z_{x^2, y^{m-3}} > \dots > z_{x^2, y} > z_{x^2, 1} > z_{x, y^{m-1}} > z_{x, y^{m-2}} > z_{x, y^{m-3}} > \dots > z_{x, y} > z_{x, 1} > z_{1, y^{m-1}} > z_{1, y^{m-2}} > z_{1, y^{m-3}} > \dots > z_{1, y} > z_{1, 1} > y$  biçimindeki sıralama dikkate alınarak aşağıdaki tam yeniden yazma sistemi elde edilir [1]:

### Tam Yeniden Yazma Kuralları

- $x^n \rightarrow 1$
- $y^m \rightarrow 1$
- $z_{x^k, y^l}^2 \rightarrow z_{x^k, y^l}$
- $z_{x^{k_1, y^{l_1}}}, z_{x^{k_2, y^{l_2}}} \rightarrow z_{x^{k_2, y^{l_2}}}, z_{x^{k_1, y^{l_1}}}$  ( $z_{x^{k_1, y^{l_1}}} > z_{x^{k_2, y^{l_2}}}$  ise)
- $xz_{x^k, y^l} \rightarrow z_{x^{k+1, y^l}}$
- $z_{x^k, y^l}y \rightarrow yz_{x^k, y^{l+1}}$
- $xy \rightarrow yx$

## $\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}$ Grafının Tanımı

$\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m$  Schützenberger çarpımının tam yeniden yazma sistemine bağlı olarak yönsüz bir graf

$\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m} = (V_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}}, E_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}})$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

**Köşe kümesi:**

$$V_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}} = \{\text{üreteçler}\} \cup \{\text{kuralların sol yanları}\} = \{x, y, z_{x^k, y^l}\} \cup \{x^n, y^m, z_{x^k, y^l}^2, z_{x^{k_1, y^{l_1}}}, z_{x^{k_2, y^{l_2}}}, xz_{x^k, y^l}, z_{x^k, y^l}y, xy\}$$

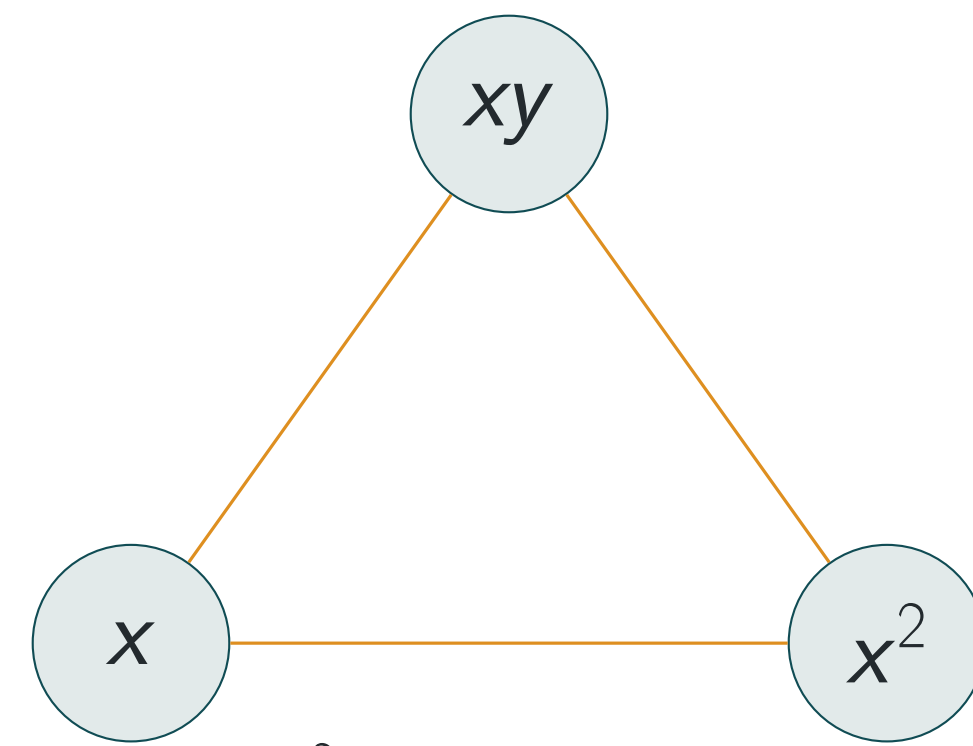
**Kenar kümesi:**

$$E_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}} = \{(v_p, v_q) : v_p, v_q \text{ köşelerinin soldan ya da sağdan birbiri ile çakışması (overlap)}\}$$

Örneğin  $(x, x^n)$ ,  $(x, xz_{x^k, y^l})$ ,  $(x, xy)$ ,  $(y, y^m)$ ,  $(xy, y)$ ,  $(z_{x^k, y^l}y, y)$ ,  $(z_{x^k, y^l}, z_{x^k, y^l}^2)$ ,  $(z_{x^{k_1, y^{l_1}}}, z_{x^{k_1, y^{l_1}}}, z_{x^{k_2, y^{l_2}}})$ ,  $(z_{x^k, y^l}, z_{x^k, y^l}y)$ ,  $(x^n, xz_{x^k, y^l})$ , birer kenardır.

Burada  $0 \leq k, k_1, k_2 \leq n-1$ ,  $0 \leq l, l_1, l_2 \leq m-1$  dir.

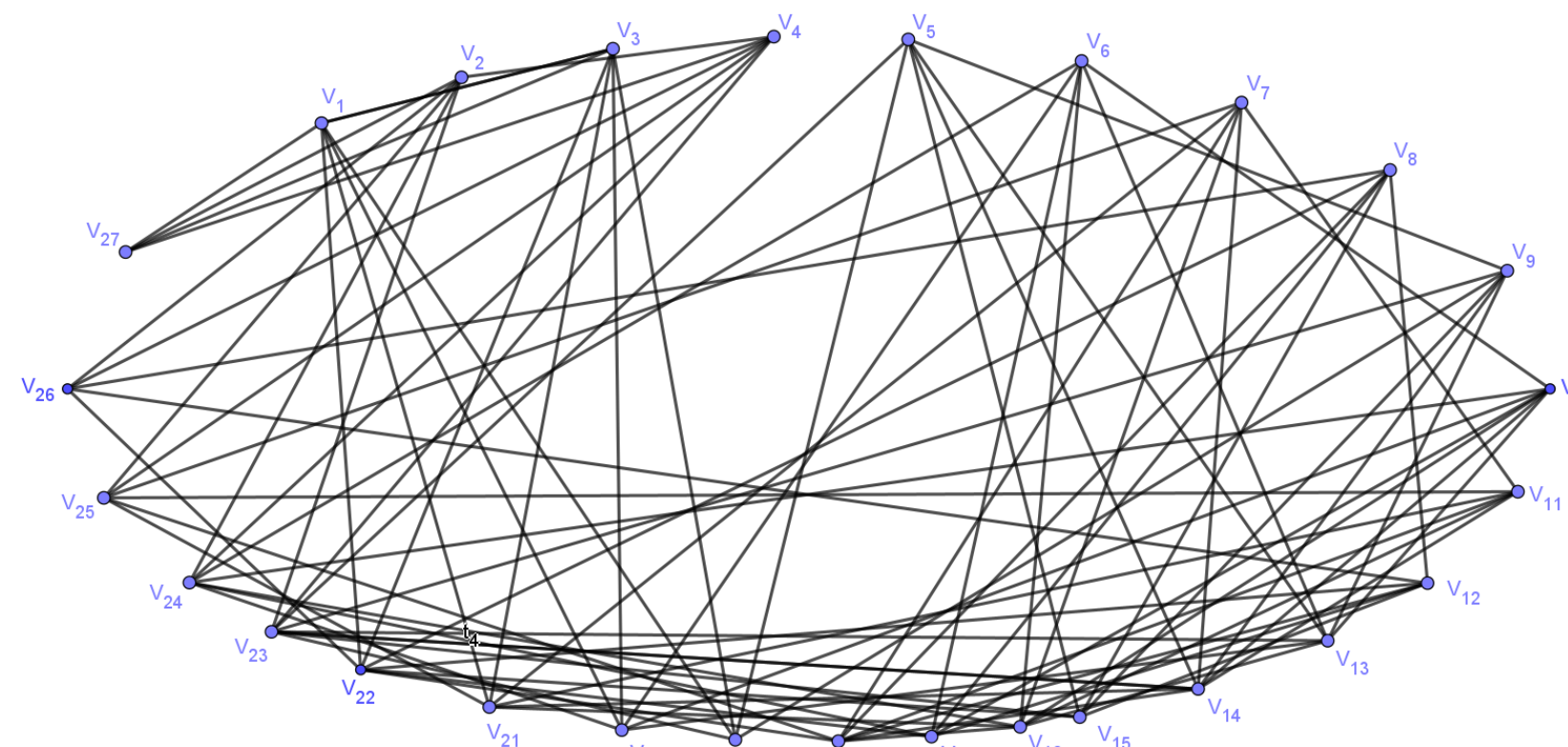
## Girth = 3: Bir Üçgen Örneği



$\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}$  grafında  $x, x^2, xy$  köşeleri bir üçgen oluşturur.

Dolayısıyla graf 3 uzunluğunda bir döngü içerir ve  $\text{girth}(\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}) = 3$  olur (Teorem 3.4).

## $\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2$ Graf Çizimi Örneği



## Ana Sonuçlar ( $n, m \geq 2$ ) [4]

**Teorem 3.1.**  $\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}$  grafının köşe sayısı

$$|V_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}}| = \frac{(nm)^2 + 7nm + 10}{2}$$

olup, kenar sayısı

$$|E_{\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}}| = 6 + 10nm + \frac{3(nm-1)nm}{2} + 3 \left( \sum_{i=1}^{n-1} im^2 + \frac{nm(m-1)}{2} \right) + \sum_{i=1}^{m-2} i(nm - (i+1))$$

dir.

**Teorem 3.2.** Grafın maksimum ve minimum dereceleri

$$\Delta(\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}) = nm + 4, \quad \delta(\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}) = 4$$

şeklindedir.

**Teorem 3.3.** Derece dizisi

$$DS(\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}) = \{4^{a_1}, 5^{a_2}, 6^{a_3}, \dots, (nm+4)^{a_{nm+1}}\}$$

biçimindedir ( $a_i$  çoklukları  $n$  ve  $m$ 'ye bağlı olarak [4]'te açık şekilde verilmiştir) ve **düzensizlik indeksi**

$$t(\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}) = nm + 1$$

dir.

**Teorem 3.4.**  $\Gamma_{\mathbb{Z}_n \circ \mathbb{Z}_m}$  grafının çevre değeri (girth) 3'tür.

## Örnek: $\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2$ Grafı

$n = m = 2$  için elde edilen sayısal sonuçlar:

$$\Delta(\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}) = 8, \quad \delta(\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}) = 4,$$

$$DS(\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}) = \{4^1, 5^2, 6^{15}, 7^4, 8^5\}, \quad t(\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}) = 5,$$

$$\text{girth}(\Gamma_{\mathbb{Z}_2 \circ \mathbb{Z}_2}) = 3, \quad |V| = 27, \quad |E| = 86.$$

**Bazı derece hesapları:**

- $x$  ve  $x^2$  köşeleri birbirine bağlı olup ayrıca  $xz_{1,1}, xz_{1,y}, xz_{x,1}, xz_{x,y}, xy$  köşeleri ile de bağlantılıdır:  $\deg(x) = \deg(x^2) = 6$ .
- $z_{x,y}$  ve  $z_{x,y}^2$  köşeleri birbirine ve  $z_{x,yz_{1,1}}, z_{x,yz_{1,y}}, z_{x,yz_{x,1}}, xz_{x,y}, z_{x,y}y$  köşelerine bağlıdır:  $\deg(z_{x,y}) = \deg(z_{x,y}^2) = 6$ .
- $z_{1,yz_{1,1}}$  köşesi 8 köşe ile bağlantılıdır:  $\deg(z_{1,yz_{1,1}}) = 8$ .
- $z_{x,1z_{1,1}}$  köşesi 7 köşe ile bağlantılıdır:  $\deg(z_{x,1z_{1,1}}) = 7$ .
- $z_{x,y}$  köşesi  $y, y^2, z_{x,y}, z_{x,y}^2, xz_{x,y}$  köşelerine bağlıdır:  $\deg(z_{x,y}) = 5$ .
- $xy$  köşesi  $x, x^2, y, y^2$  köşelerine bağlıdır:  $\deg(xy) = 4$ .

**Derecelere göre köşe sınıfları:**

### Derece Köşeler

4	$xy$
5	$z_{x,y}y, xz_{1,1}$
6	$x, x^2, y, y^2, z_{1,1}, z_{1,1}^2, z_{1,y}, z_{1,y}^2, z_{x,1}, z_{x,1}^2, z_{x,y}, z_{x,y}^2, z_{x,yz_{1,1}}, xz_{1,y}, z_{x,1}y$
7	$z_{x,1z_{1,1}}, z_{x,yz_{1,y}}, xz_{x,1}, z_{1,y}y$
8	$z_{1,yz_{1,1}}, z_{x,1z_{1,y}}, z_{x,yz_{x,1}}, xz_{x,y}, z_{1,y}$

## Sonuç

Bu çalışmada, [5] (sonlu devirli grupların serbest ve direkt çarpımları) ve [6] (serbest değişmeli monoid ile sonlu devirli monoidin yarı-direkt çarpımı) çalışmalarındaki yaklaşımlardan hareketle, cebirde önemli bir diğer çarpım olan **Schützenberger çarpımının** tam yeniden yazma sistemi üzerine bir graf tanımlanmış; bu grafın köşe/kenar sayıları, derece yapısı, düzensizlik indeksi ve girth değeri belirlenmiştir. Tanımlanan graf, cebirsel yapı ile kombinatoryal yapı arasında yeni bir köprü kurmaktadır.