

Dr. Sadık YILDIZ

sadikyildiz06@gmail.com

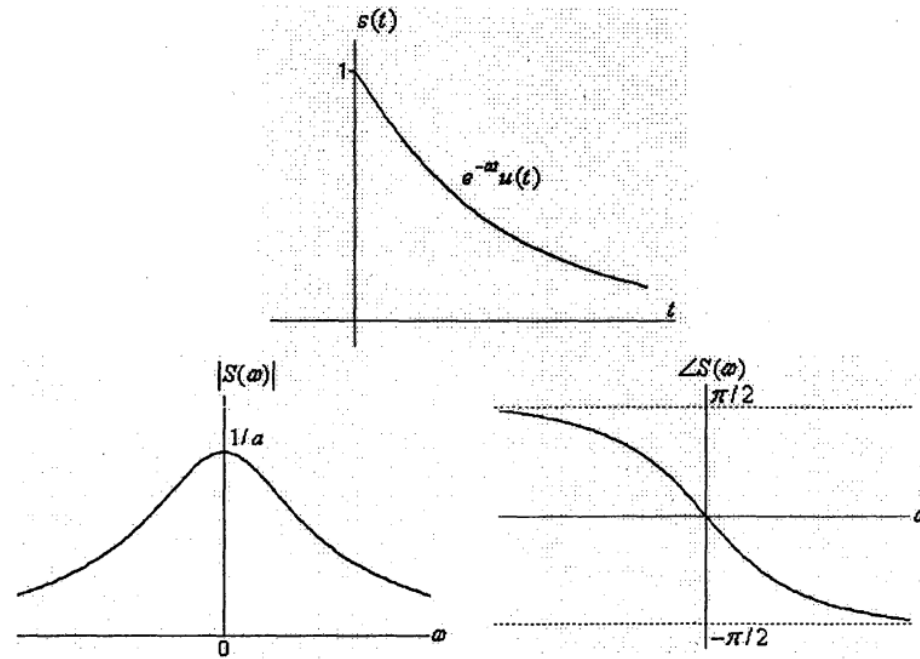
**Gazi Üniversitesi
Elektrik Elektronik Mühendisliği
(Teknoloji Fakültesi)**

2025– ANKARA

SAYISAL HABERLEŞME

2.2. FOURİER DÖNÜŞÜMÜ VE FREKANS UZAYI

➤ $s(t) = e^{-at}u(t)$



Şekil 2.4 $s(t) = e^{-at}u(t)$ işareti ile bu işaretin genlik ve faz spektrumu

SAYISAL HABERLEŞME

2.2. FOURİER DÖNÜŞÜMÜ VE FREKANS UZAYI

□ Parseval'in Teoremi

- Parseval'in teoremi, zaman uzayı ve frekans uzayı arasında

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(f) s_2^*(f) df$$

ilişkisini kurmaktadır. Tek bir işaret ele alındığında, yani $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ durumunda, bu teorem kullanılarak

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(f)|^2 df$$

Şeklinde Rayleigh'nin enerji teoremi elde edilmektedir.

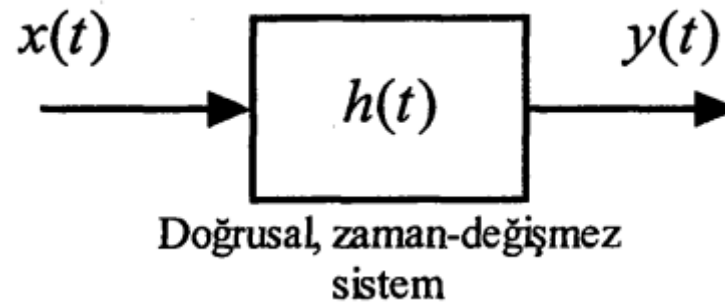
- Rayleigh'nin enerji teoremi sayesinde bir işaretin enerjisinin frekans uzayından elde edilmesi mümkün olmaktadır. $|S(f)|^2$ işaret enerjisinin frekansa göre dağılımını gösterdiğinden **enerji spektral yoğunluğu (ESD)** olarak adlandırılmaktadır.

SAYISAL HABERLEŞME

2.2. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE FREKANS UZAYI

□ Konvolüsyon (Evrişim)

- Şekil 2.5'de gösterildiği gibi, doğrusal zamanla-değişmez bir sisteme uygulanan **giriş $x(t)$** , **sistemin dürtü yanıtı $h(t)$** ve **sistem çıkışı $y(t)$** ile gösterildiğinde, **sistem çıkışı $y(t) = x(t) * h(t)$** şeklinde giriş ile sistemin dürtü yanıtının konvolüsyonu şeklinde oluşmaktadır.



Şekil 2.5. Doğrusal zamanla-değişmez sistem için giriş, dürtü ve çıkış

SAYISAL HABERLEŞME

2.2. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE FREKANS UZAYI

□ Konvolüsyon (Evrişim)

➤ Konvolüsyon (evrişim) işlemi sürekli zamanda matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda) d\lambda$$

Fourier dönüşümünün konvolüsyon özelliğinden dolayı, sistem çıkışının **frekans spektrumu** $Y(f)$, girişin **frekans spektrumu** $X(f)$ ile **sistemin frekans yanıtı** $H(f)$ 'in çarpımı olarak,

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

şeklinde elde edilmektedir.

SAYISAL HABERLEŞME

2.2. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE FREKANS UZAYI

□ Zamanda Çarpım (Frekansta Konvolüsyon)

- İki işaretin ***zaman uzayında çarpımı*** gerçekleştirildiğinde, bu işlem, ***frekans uzayında iki işaretin frekans spektrumlarının konvolüsyonuna*** karşılık gelmektedir.
- Bu nedenle $s_3(t) = s_1(t)s_2(t)$ işaretinin frekans spektrumu $S_3(w) = \frac{1}{2\pi} S_1(w) * S_2(t)$ şeklinde bulunabilmektedir.

SAYISAL HABERLEŞME

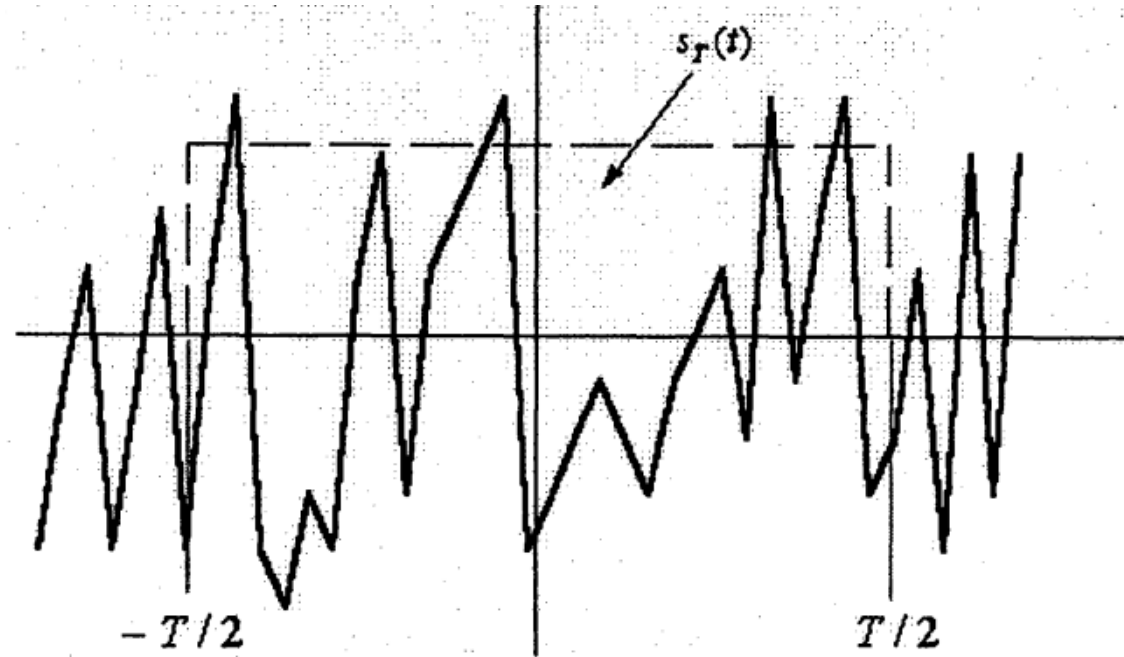
2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

- **Güç spektral yoğunluğu (PSD)**, *işaret gücünün frekansa bağlı dağılımını göstermekte ve işaret gücünün hangi frekanslarda yoğunlaştığının bilgisini vermektedir.*
- Güç spektral yoğunluğu sayesinde bir işaretin verimli şekilde iletilmesi için gerekli haberleşme kanalı bant genişliği bulunabilmektedir.
- Ayrıca, güç spektral yoğunluğu kullanılarak *haberleşme sisteminin* iletilen işaret üzerindeki etkileri incelenmektedir.
- Güç spektral yoğunluğu ifadesinin oluşturulabilmesi için sadece $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ arasında tanımlı olacak şekilde kırpılmış bir işaret ele alınmakta ve özgün işaretin pencerelenmesi sonucunda elde edilecek işaret şu şekilde ifade edilir
- $$s_T(t) = \begin{cases} s(t), & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \text{ veya } s_T = s(t) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

➤ Şekil 2.8 de bu işleme bir örnek gösterilmektedir.



Şekil 2.8. Örnek bir işaretin $(-T/2, T/2)$ aralığında pencerelemesi

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

- Herhangi bir $s(t)$ işaretinin normalize edilmiş gücü şu şekilde ifade edilir

$$P = [s^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt$$

- $(-T/2, T/2)$ arasında $s(t)$ işareti $s_T(t)$ 'ye eşit olduğundan normalize edilmiş güç şu şekilde ifade edilir

$$P = [s^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s_T^2(t) dt$$

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

- Parseval teoremi kullanılarak normalize edilmiş güç şu şekilde yazılır.

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T} \right] df$$

- Bu denklemde gücün frekansa bağlı dağılımı şu şekilde ifade edilir.

$$P_S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T}$$

Bu denklem **güç spektral yoğunluğu (PSD)** olarak adlandırılır.

- Güç spektral yoğunluğunun birimi Watt/Hertz olarak elde edilmektedir. Bu ifadeden anlaşılacağı gibi, güç spektral yoğunluğu frekansa bağlı, gerçekte ve negatif olmayan bir fonksiyon olmaktadır.

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

- Güç spektral yoğunluğu kullanılarak normalize edilmiş güç değeri, frekans uzayından şu şekilde bulunur.

$$P = [s^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(f) df$$

- Bu nedenle normalize edilmiş güç değeri, güç spektral yoğunluğunun altındaki alana eşittir.

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

□ *Özilinti (Otokorelasyon)*

- **İlinti (korelasyon)**, iki işaretin benzerliğinin bir ölçütüdür.
- Yüksek ilinti gösteren işaretler yüksek benzerlik, düşük ilinti gösteren işaretler ise düşük benzerlik göstermektedir.
- Özilinti, bir işaretin farklı zaman gecikmeleri altında kendine olan benzerliğinin bir ölçütüdür. Özilinti fonksiyonu şu şekilde ifade edilir.

$$R_s(\tau) = [s(t) s(t + \tau)] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) s(t + \tau) dt$$

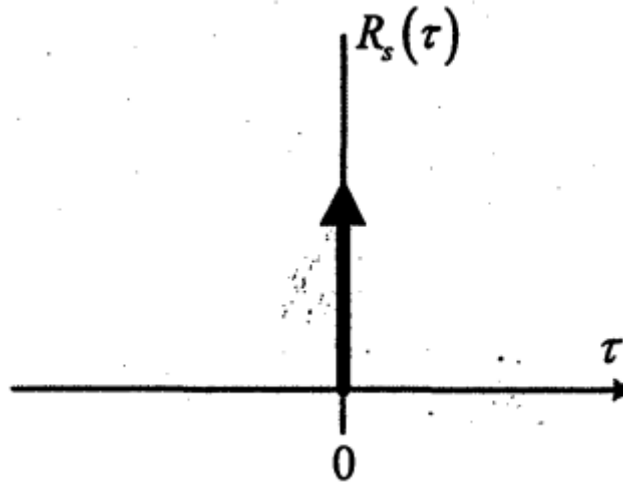
- Özilinti fonksiyonunda $\tau = 0$ için, işaret doğrudan kendisi ile karşılaştırıldığından, en yüksek ilinti değeri elde edilmektedir.
- Herhangi bir $\tau \neq 0$ için ise, işaret kendisinin sağa veya sola ötelenmiş bir şekli ile karşılaştırılmaktadır.

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

❑ Özilinti (Otokorelasyon)

- Tamamen rasgele bir işaret, sadece $\tau = 0$ için kendisi ile benzerlik göstereceğinden, rasgele bir işaretin özilinti fonksiyonu $\tau = 0$ için bir dürtü şeklinde olmaktadır.
- Bu durumda oluşan özilinti fonksiyonu Şekil 2.9'da gösterilmektedir.
- Dolayısıyla tamamen rasgele bir işaret ele alındığında, bu işaretin kendisinin sağa veya sola ötelenmiş biçimleri ile benzerliğinin bulunmadığı söylenebilmektedir.



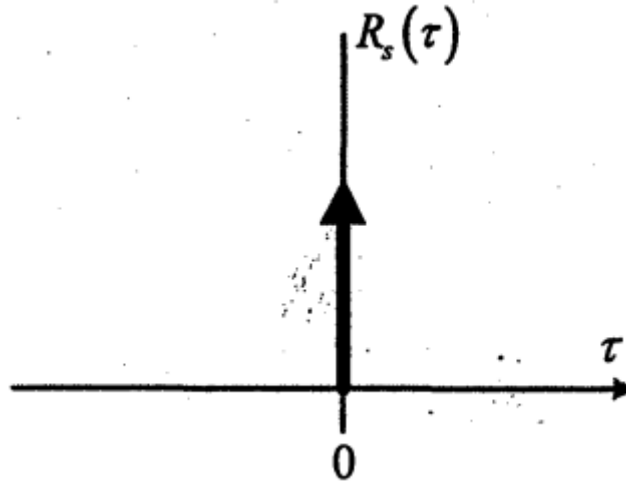
Şekil 2.9. Tamamen rasgele bir işaretin özilinti fonksiyonu

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

❑ Özilinti (Otokorelasyon)

- Periyodik işaretlerin tekrar etme özelliklerinden dolayı, aynı periyot ile periyodik bir özilinti fonksiyonu elde edilmektedir.
- Periyodik işaret, belirli bir periyot ile tekrar ettiğinden geciktirilmemiş biçimiyle olan benzerliği, periyodun tam sayı katı kadar geciktirilmiş biçimiyle olan benzerliğe eşit olmaktadır.



Şekil 2.9. Tamamen rasgele bir işaretin özilinti fonksiyonu

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

□ *Güç Spektral Yoğunluğu ile Özilinti (Otokorelasyon) fonksiyonu arasındaki ilişki*

- *Özilinti fonksiyonunun Fourier dönüşümü*

$$R_s(\tau) \xLeftrightarrow{F} P_s(f)$$

- *şeklinde güç spektral yoğunluğunu vermektedir.*
- *Bu nedenle güç spektral yoğunluğunun elde edilmesi için, özilinti fonksiyonu hesaplandıktan sonra özilinti fonksiyonunun Fourier dönüşümü alınabilmektedir.*

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

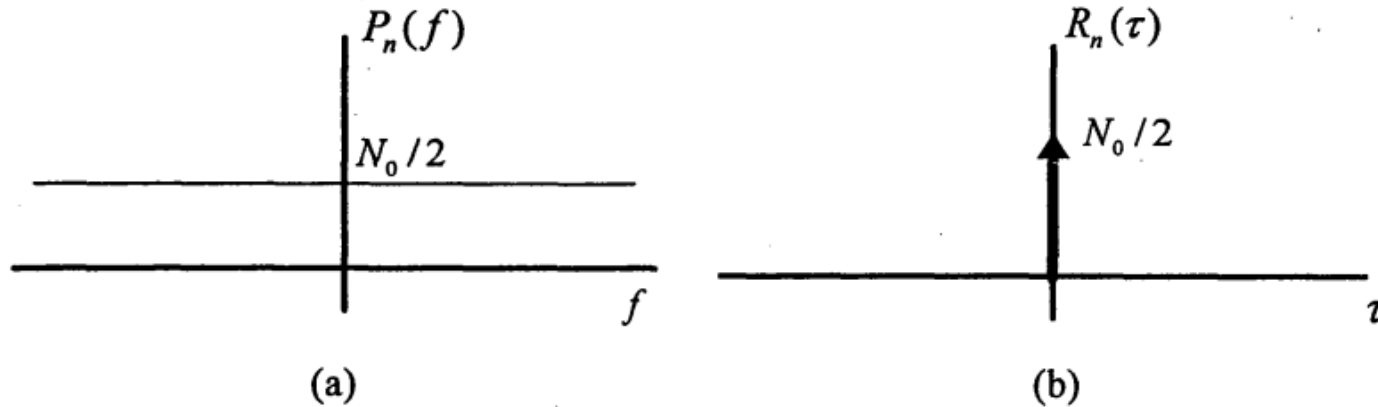
□ Beyaz Gürültü

- Haberleşme sistemlerinde $n(t)$ şeklinde gösterilen gürültü türüdür

$$P_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{ watt/hertz}$$

şeklinde bir güç spektral yoğunluğuna sahip olduğunda beyaz gürültü olarak adlandırılmaktadır.

- Paydadaki 2 faktörü, $P_n(f)$ 'in Şekil 2.10(a)'da gösterildiği gibi çift-yanlı bir güç spektral yoğunluğunu ifade ettiğini belirtmek için kullanılmaktadır.



Şekil 2.10. Beyaz gürültünün (a) güç spektral yoğunluğu ve (b) ötilinti fonksiyonu.

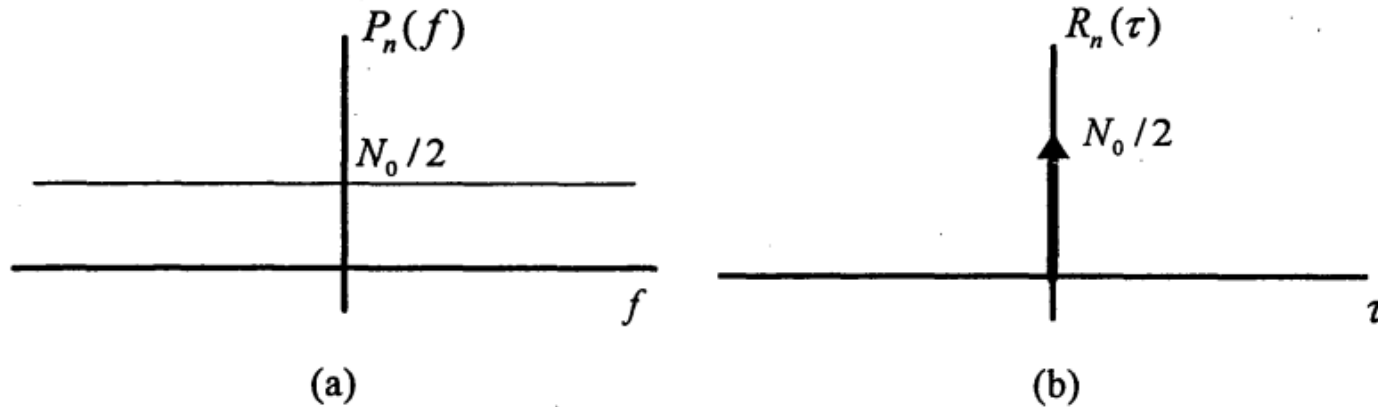
SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

□ Beyaz Gürültü

- Beyaz ışık, elektromanyetik ışımanın görünür bölgesindeki tüm frekans bileşenlerini eşit oranda barındırmaktadır.
- **Beyaz gürültü adı**, gürültünün güç spektral yoğunluğunun **tüm frekanslarda eşit olmasıyla** beyaz ışığa olan benzerliğinden dolayı kullanılmaktadır.
- Beyaz gürültünün özilinti fonksiyonu şu şekilde bulunur.

$$R_n = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$



Şekil 2.10. Beyaz gürültünün (a) güç spektral yoğunluğu ve (b) özilinti fonksiyonu.

SAYISAL HABERLEŞME

2.3. GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUĞU (PSD)

□ *Beyaz Gürültü*

- *Beyaz gürültü, tanım itibariyle sonsuz bir frekans bandını kapsamaktadır.*
- *Normalde gürültünün tam olarak beyaz gürültü olma ihtimali bulunmamaktadır.*
- *Fakat, gerçek sistemlerde karşılaşılan gürültü yaklaşık olarak beyaz gürültü kabul edilebilmektedir.*
- *Gerçek sistemlerin kullandığı frekans bandı sınırlı olduğundan gürültünün kapsadığı frekans bandı, sistemin çalışma bandından oldukça büyük olduğu sürece sistemdeki gürültü, beyaz gürültü olarak kabul edilebilmektedir.*

SAYISAL HABERLEŞME

2.4. DİKGEN FONKSİYONLAR

- *Dikgen fonksiyonlar, çok genel anlamda bağımsız veya ilişkisiz fonksiyonlar olarak düşünülebilmektedir.*
- *$\phi_n(t)$ ve $\phi_m(t)$ ile gösterilen iki fonksiyon, birbirlerine $a < t < b$ aralığında dik ise, bu iki fonksiyon şu ilişkiyi sağlamaktadır.*

$$\int_a^b \phi_n(t) \phi_m(t) dt = 0 \quad n \neq m$$

- *Dikgen fonksiyonlar doğrudan bu ilişki doğrultusunda tanımlanmaktadır.*
- *Bir fonksiyon seti $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \dots, \phi_n(t), \dots\}$ ele alındığında, tüm fonksiyonlar birbirlerine $a < t < b$ aralığında dik ise şu şekilde bulunmaktadır.*

$$\int_a^b \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ K_n, & n = m \end{cases} = K_n \delta_{nm}$$

- *δ_{nm} fonksiyonu Kroneker delta olarak adlandırılmakta ve şu şekilde tanımlanmaktadır.*

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq m \\ 1 & , \quad n = m \end{cases}$$

- *Tüm n değerleri için $K_n = 1$ ise, (t) fonksiyonları **birimdik fonksiyonlar** olarak adlandırılmaktadır.*

SAYISAL HABERLEŞME

2.4. DİKGEN FONKSİYONLAR

□ *Fourier Serileri*

- *Fourier serileri, işaretlerin $T_0 = 2\pi/\omega_0$, aralığında dikgen karmaşık üstel fonksiyonlar veya karmaşık sinüzoidal fonksiyonların ağırlıklandırılmış birleşimi şeklinde ifade edilebilmesini sağlamaktadır.*
- *Bu nedenle, Fourier serilerinin temel fonksiyonları $\phi_n(t)$, karmaşık sinüzoidal fonksiyonlar veya karmaşık üstel fonksiyonlar olup, Euler bağıntısı ($e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$) doğrultusunda iki gösterim arasında geçiş yapılabilmektedir.*
- *Herhangi bir işaretin, sınırlı $t_1 < t < t_1 + T_0$ aralığındaki karmaşık Fourier serisi açılımı şu şekilde gösterilmektedir. ($\omega_0 = 2\pi/T_0$)*

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

SAYISAL HABERLEŞME

2.4. DİKGEN FONKSİYONLAR

□ *Fourier Serileri*

- *Fourier seri açılımında karmaşık Fourier katsayıları şu şekilde bulunur.*

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T_0} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- *Fourier seri katsayıları genelde karmaşıktır ve c_0 katsayısı, dalga biçiminin dc değerine karşılık gelmektedir.*

SAYISAL HABERLEŞME

2.4. DİKGEN FONKSİYONLAR

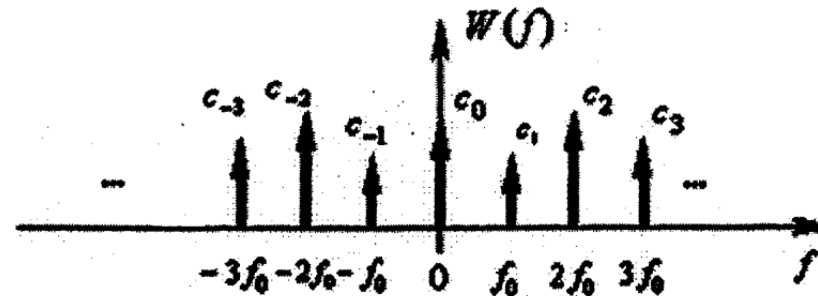
□ Periyodik İşaretlerin Frekans Spektrumu

- T_0 periyodu ile periyodik $s(t)$ işaretinin frekans spektrumu

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0)$$

şeklinde $f_0 = 1/T_0$ frekansının tamsayı katlarında gözükten dürtü işaretleri şeklinde oluşmaktadır.

- Frekans spektrumunda oluşan bir dürtü bileşeninin genliği Fourier serisi katsayı hesabından elde edilebilmektedir. Şekil 2.11'de periyodik bir dalga biçimi için örnek bir frekans spektrumu gösterilmektedir.



Şekil 2.11. Periyodik bir işaret için örnek frekans spektrumu.

SAYISAL HABERLEŞME

2.4. DİKGEN FONKSİYONLAR

□ *Periyodik İşaretlerin Frekans Spektrumu*

- *Periyodik işaretlerin normalize edilmiş ortalama gücü, Fourier seri katsayıları cinsinden*

$$P = [s^2(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Şeklinde hesaplanabilmektedir.

- *Periyodik bir işaretin güç spektral yoğunluğu (PSD) ise şu şekilde bulunabilmektedir.*

$$P(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(f - nf_0)$$